OMÜ-FEN FAKÜLTESİ

MATEMATİK BÖLÜMÜ

MAT313 TOPOLOJİYE GİRİŞ ARA SINAVI

01 Aralık 2023

Süre: 75 dk

AD-SOYAD	NUMARA	İMZA	ALDIĞI PUAN

S1) Boş bırakılmış yerleri uygun ifadelerle doldurunuz.

(X,d) metrik uzay olsun. Bu durumda;

a) (4 puan) Sonlu sayıda kapalı kümenin birleşimi KAPALIDIR…………… .

b) (4 puan) Her bir açık yuvar bir …AÇIK…………… kümedir.

c) (4 puan) $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisi ve $\{x_{n_k}\}$ bu Cauchy dizisinin bir alt dizisi olsun. Eğer $\{x_{n_k}\}$ alt dizisi ……YAKINSAK……… ise Cauchy dizisi ……YAKINSAKTIR .

d) (4 puan) $A \subset X$ ve $p \in X$ için eğer p noktasını içeren her bir açık küme A kümesinin p den farklı bir noktasını da içeriyorsa bu noktaya A kümesinin bir …YIĞILMA NOKTASI…………………….. denir.

e) (4 puan) $\left[-1,\frac{1}{2}\right)$ kümesi $(\mathbb{R},d)$ alışılmış uzayında -1 noktasının komşuluğu mudur?

……HAYIR……. (Evet ya da Hayır yazmanız yeterlidir.)

S2) Aşağıda verilen (X,δ) ve $(\mathbb{R}^2,\rho)$ ikililerinin neden metrik uzay olmadığını açıklayın.

a) (10 puan) (X,d) bir metrik uzay olmak üzere $\delta(x,y)=k.d(x,y), \quad k \in \mathbb{R}$

$k<0$ için metrik fonksiyonunun (M1) şartı sağlanmaz.

b) (10 puan) $x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$ için $\rho(x,y)=|x_1|+|x_2|+|y_1|+|y_2|$

$x=y$ için $\rho(x,y)=0$ olmaz. (M2) şartı sağlanmaz. Örneğin, $x=y=(1,1)$ alınırsa

$$\rho(x,y)=\rho((1,1),(1,1))=|1|+|1|+|1|+|1|=4$$

elde edilir.

S3) (15 puan) $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1<y<2\right\}$ kümesinin $\mathbb{R}^2$ alışılmış uzayında açık olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Herhangi bir $(x_0,y_0)\in A$ noktası için

$$\varepsilon\le\min\{|y_0-1|,|2-y_0|\}$$

seçilirse

$$D_\varepsilon(x_0,y_0)\subset A$$

olur. A kümesi $\mathbb{R}^2$ alışılmış uzayında açıktır.

S4) (25 puan) $x=(x_1,x_2),\ y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$ olmak üzere $d:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ fonksiyonu

$$d(x,y)=maks\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|\}$$

şeklinde tanımlı bir metrik olsun. $A=\left\{(x,y):|x|<1,\ |y|\le 3\right\}$ kümesinin çapını bulunuz.

Çözüm:

Bir kümenin çapı $D(A)=\sup\left\{d(x,y):x,y\in A\right\}$ şeklinde tanımlıdır. A kümesi üzerinde uzak olan köşelerden $(-1,-3)$ ve $(1,3)$ noktalarını seçelim. O halde,

$$D(A)=\sup\left\{\text{maks}\{|-1-1|,|-3-3|\}\right\}=\sup\{6\}=6$$

elde edilir.

S5) (20 puan) Alışılmış metrik ile $[1,2]$ ve $[2,4]$ metrik uzaylarının homeomorfik olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$f:[1,2]\to[2,4]$$
$$x\to y=f(x)=2x$$

fonksiyonu bir homeomorfizmdir. Dolayısıyla $[1,2]$ ve $[2,4]$ metrik uzayları homeomorfiktir. Gerçekten, her $x_1,x_2\in[1,2]$ için

- $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 2x_1=2x_2\Rightarrow x_1=x_2$ olduğundan f fonksiyonu bire-birdir.
- Her $y\in[2,4]$ için $x=\dfrac{y}{2}\in[1,2]$ olup

  $$f(x)=f\left(\frac{y}{2}\right)=2\left(\frac{y}{2}\right)=y$$

  elde edilir. f dönüşümü örtendir.
- $f^{-1}(x)=\dfrac{x}{2}$ ve $f(x)=2x$ dönüşümlerinin sürekli olduğu açıktır.